Lineare und Ganzzahlige Optimierung
7. Übung

1. Betrachten Sie das folgende lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\max & 9x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & & & & & \\
\text{s.d.} & x_1 & & & & & + & x_4 & & & & & = & 1 \\
 & 6x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & & & = & 9 \\
 & 18x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 81 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Zeigen Sie, dass der Simplex-Algorithmus mit "Largest Coefficient Rule" als Pivot-Regel und $\{3, 4, 5\}$ als Startbasis alle Ecken des Lösungspolyeders durchläuft, bevor er eine Optimallösung findet. (4 Punkte)

2. Betrachten Sie die folgende Situation: Sie sind ein Devisenhändler, der mit n verschiedenen Währungen handelt. Ihr Anfangskapital ist gegeben als $b = (b_1, \ldots, b_n) \geq 0$, wobei b_i der Betrag von Währung i ist. Für jedes Paar $1 \leq i, j \leq n$ von Währungen gibt es einen Wechselkurs r_{ij}, d.h. Sie können einen beliebigen (nicht-negativen) Betrags x_{ij} von Währung i in $r_{ij}x_{ij}$ Einheiten der Währung j tauschen. Ihr Ziel ist es, so zu tauschen, dass Sie am Ende einen möglichst großen Betrag von Währung 1 haben. Sie können annehmen, dass Sie alle Tauschaktionen gleichzeitig durchführen (z.B. durch kostenloses Geldleihen für den Moment, in dem das Geld getauscht wird), aber am Ende müssen all Währungsbeträge nicht-negativ sein.

   Modellieren Sie dieses Problem als ein lineares Programm und geben Sie das duale LP an. Unter welchen Umständen ist das LP unbeschränkt (in diesem Fall spricht man von einer Arbitrage-Möglichkeit, also der Möglichkeit, risikolos Gewinn zu machen)? (5 Punkte)

3. Beschreiben Sie einen Algorithmus für das folgende Problem: Gegeben ist ein Baum T, und man hat $O(|V(T)|)$ Zeit für eine Präprozessierung. Danach soll man in der Lage sein, zu zwei gegebenen Knoten x und y von T in Zeit $O(\mathrm{dist}_T(x, y))$ den x-y-Weg in T zu bestimmen. (5 Punkte)

   Bemerkung: Dieses Problem muss während des Netzwerk-Simplex-Algorithmus gelöst werden, wenn man einen Fundamentalkreis berechnet.

4. Sei (G, u, b, c) eine Instanz des Minimum-Cost Flow Problem.

   (a) Dualisieren Sie die LP-Formulierung des Minimum-Cost Flow Problem aus der Vorlesung.

   (b) Es sei (r, T, L, U) eine zulässige Baumstruktur für (G, u, b, c), und es sei f der dazu gehörende Fluss und π das dazu gehörende Potential. Zeigen Sie mit Hilfe des komplementären Schlupfs, dass f optimal ist, wenn $c_\pi(e) \geq 0$ für alle $e \in L$ und $c_\pi(e) \leq 0$ für alle $e \in U$. (3+3 Punkte)

   Bemerkung: Aussage (b) wurde in der Vorlesung schon auf andere Art bewiesen.

Abgabe: Dienstag, 6. Dezember, 2016, vor der Vorlesung.