Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Lineare und Ganzzahlige Optimierung
10. Übung

1. Benutzen Sie den ELLIPSOID-ALGORITHMUS, um zu zeigen, dass ein gegebenes zulässiges und beschränktes lineares Programm $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ und $c \in \mathbb{Q}^n$ in Zeit $O((m+n)^9(\mathrm{size}(A) + \mathrm{size}(b) + \mathrm{size}(c))^2)$ gelöst werden kann. (6 Punkte)

2. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge mit $rB^n \subseteq K \subseteq RB^n$ für Zahlen $0 < r \leq \frac{R}{2}$. Nehmen Sie an, dass es einen Polynomzeit-Algorithmus $\mathcal{A}$ gibt, der zu einem gegebenen $x \in \mathbb{R}^n$ entweder entscheidet, dass $x \in K$ gilt, oder einen Vektor $v \in \mathbb{Q}^n$ mit $\max\{v^t z \mid z \in K\} \leq 1$ und $1 < v^t x$ ausgibt. Zeigen Sie, dass es für das folgende Problem einen Algorithmus mit einer Laufzeit gibt, die polynomiell in n, $\ln(\frac{1}{r})$, $\ln(R)$, $\ln(\frac{1}{\epsilon})$ und $\mathrm{size}(c)$ ist: Gegeben seien ein Vektor $c \in \mathbb{Q}^n$ und ein Wert $\epsilon > 0$. Die Aufgabe ist, ein $x \in K$ mit $c^t x \geq \max\{c^t z \mid z \in K\} - \epsilon$ zu berechnen. (5 Punkte)

3. Sei wieder $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge mit $rB^n \subseteq K \subseteq RB^n$ für Zahlen $0 < r \leq \frac{R}{2}$. Nehmen Sie an, dass ein Polynomzeit-Orakel gegeben ist, das zu jeder linearen Zielfunktion eine optimale Lösung in K berechnet. Zeigen Sie, dass es dann ein Separationsorakel mit polynomieller Laufzeit für $K^* := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^t x \leq 1 \text{ für alle } x \in K\}$ gibt. (4 Punkte)

4. Es sei G ein einfacher gerichteter Graph. Betrachten Sie das folgende lineare Programm:

$$
\begin{array}{lrcll}
\min & \sum\limits_{e=\{v,w\} \in E(G)} x_{vw} & & & \\
\text{s.d.} & \sum\limits_{w \in S} x_{vw} & \geq & \lceil \frac{1}{4}|S|^2 + \frac{1}{2}|S| \rceil & \text{für } v \in V(G), S \subseteq V(G) \setminus \{v\} \\
 & x_{uw} & \leq & x_{uv} + x_{vw} & \text{für } u, v, w \in V(G) \\
 & x_{vw} & \geq & 0 & \text{für } v \in V(G) \\
 & x_{vv} & = & 0 & \text{für } v \in V(G)
\end{array}
$$

   (a) Zeigen Sie, dass dies eine Relaxierung des folgenden Problems ist: Finde Abstände x_{vw} für die Knoten von G, so dass $\sum\limits_{e=\{v,w\} \in E(G)} x_{vw}$ minimiert wird, unter der Nebenbedingung dass es eine Sortierung $\{v_1, \ldots, v_{|V(G)|}\} = V(G)$ der Knoten gibt mit $x_{v_i v_j} = |i - j|$ für $i, j \in \{1, \ldots, |V(G)|\}$.

   (b) Zeigen Sie, dass es ein Separationsorakel mit polynomieller Laufzeit für den Lösungsraum dieses LPs gibt. (3+2 Punkte)

Abgabe: Dienstag, 10. Januar, 2017, vor der Vorlesung.