Wintersemester 2018/19
Professor Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Algorithmische Mathematik I
7. Übung

1. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke so um, dass für die angegebenen Argumente Auslöschung vermieden wird:

   (a) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ für $x \gg 1$ (d. h. x ist wesentlich größer als 1).

   (b) $\sqrt[3]{1+x} - 1$ für $x \approx 0$.

   (c) $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ für $x \approx 0$.

   (d) $\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$ für $x \gg 1$. (1+1+1+1 Punkte)

2. Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ von Stichproben bezeichne

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

   den Mittelwert der Stichprobe. Zur Berechnung der Varianz der Stichprobe stehen die Formeln

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2, \quad s_2^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right) \quad \text{und} \quad s_3^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - \bar{x}^2)$$

   zur Verfügung.

   (a) Zeigen Sie, dass $s_1^2 = s_2^2 = s_3^2$ gilt.

   (b) Welche der drei Formeln ist im Hinblick auf die numerische Stabilität die günstigste? (2+3 Punkte)

3. Man kann die Quadratwurzel einer Zahl $a \geq 0$ auch mit dem Newtonverfahren angewandt auf $f(x) = 1 - \frac{a}{x^2}$ berechnen. Dabei können wir uns auf Eingaben a und Startwerte x_0 mit $1 \leq a < 4$ und $1 \leq x_0 \leq 2$ beschränken.

   (a) Wie sieht eine Iteration dieses Verfahrens aus? Berechnen Sie x_1, x_2, x_3 für $a = 3$ und $x_0 = 1$.

   (b) Beweisen Sie, dass auch diese Variante quadratisch konvergiert.

   (c) Ist das Verfahren besser als das babylonische Wurzelziehen? (2+2+2 Punkte)

b.w.

4. Die Möbiusfunktion $\mu : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ ist als

$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^k, & \text{falls } n \text{ das Produkt von } k \textit{ verschiedenen } \text{Primzahlen ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Es gilt somit zum Beispiel $\mu(1) = 1$, $\mu(p) = -1$ für jede Primzahl p, $\mu(15) = 1$ und $\mu(25) = 0$.

Implementieren Sie eine Funktion `int moebius(int n)` zur Berechnung der Möbiusfunktion. Benutzen Sie die Funktion `moebius` um $\sum_{i=1}^{10\,000\,000} \mu(i)$ zu berechnen. Die dafür erforderliche Laufzeit muss unter 60 Sekunden auf den Rechnern des CIP/PC-Pools liegen. (5 Punkte)

Anmerkung: Es wird vermutet, dass $\sum_{i=1}^{n} \mu(i) = O(n^{1/2+o(1)})$ gilt. Für den Beweis dieser Vermutung ist ein Preisgeld von 1 000 000$ ausgesetzt.[1]

Abgabe: Montag, den 26.11.2018, bis 10:12 Uhr.

Abgabe der Programmierübungen:
Per E-Mail an `alma_prog_gr_XX@dm.uni-bonn.de`, wobei `XX` durch die Nummer Ihrer Übungsgruppe zu ersetzen ist, also z.B. `alma_prog_gr_07@dm.uni-bonn.de`, wenn Sie in Gruppe 7 sind, oder `alma_prog_gr_12@dm.uni-bonn.de`, wenn Sie in Gruppe 12 sind. Wenn Sie Ihre Übungsgruppe nicht kennen, schreiben Sie an `alma_prog_gr_unbekannt@dm.uni-bonn.de`.

Öffnungszeiten des Help Desks:
Montags, 16 – 19 Uhr und freitags, 12 – 15 Uhr, jeweils in Raum N1.002, Endenicher Allee 60, Nebengebäude.
`www.mathematics.uni-bonn.de/files/bachelor/help-desk.pdf`

Zusätzlich gibt es ab sofort einen **Help Desk für Programmierfragen**, und zwar immer freitags, 8 – 10 Uhr und 12 – 16 Uhr, im PC-Pool in der Wegelerstraße 6, Raum E02 (Hochschulrechenzentrum).

[1] Aber nicht von uns, sondern vom *Clay Mathematics Institute*.