

Einführung in die Diskrete Mathematik

4. Übung

1. a) Zeigen Sie, dass es Folgen von Heap-Operationen gibt, so dass in einem Fibonacci-Heap die maximale Pfadlänge in einer Arboreszenz $\Theta(n)$ ist, wenn n die Zahl der Elemente ist.
 b) Zeigen Sie, dass zwei Fibonacci-Heaps mit n_1 und n_2 Elementen in $O(\log(n_1 + n_2))$ Zeit verschmolzen werden können. Das Ergebnis soll also ein Fibonacci-Heap sein, der alle $n_1 + n_2$ Elemente enthält. (3+3 Punkte)
2. Berechnen Sie in dem Graphen, der in Abbildung 1 dargestellt ist, mit Hilfe des Algorithmus von Edmonds ein gewichtsmaximales Branching. Geben Sie auch die Graphen an (mit den zugehörigen Kantengewichten), die während des Algorithmus durch Kontraktion entstehen. (4 Punkte)

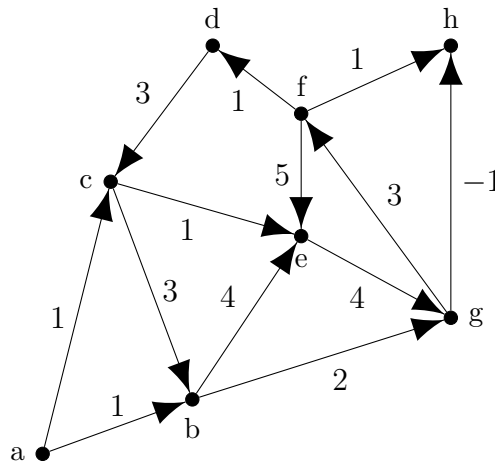


Abbildung 1: Instanz zur Berechnung eines maximal gewichteten Branchings.

3. Zeigen Sie, dass EDMONDS' BRANCHING-ALGORITHMUS zur Berechnung eines maximal gewichteten Branchings in einem gerichteten Graphen G mit Kantengewichten $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_+$ so implementiert werden kann, dass er Laufzeit $O(m + n \log n)$ hat. Dabei sei $n = |V(G)|$ und $m = |E(G)|$. (5 Punkte)
 Hinweis: Verwenden Sie Fibonacci-Heaps.

b.w.

4. Betrachten Sie folgenden Algorithmus, um in einem gegebenen gerichteten Graphen G mit Gewichten $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_+$ zu einem Knoten $r \in V(G)$, von dem aus jeder Knoten in G erreichbar ist, eine aufspannende r -Arboreszenz T mit minimalem Gewicht $\sum_{e \in E(T)} l(e)$ zu bestimmen: Es sei $G_0 := (V(G), \{e \in E(G) \mid l(e) = 0\})$. Wenn G_0 eine aufspannende r -Arboreszenz enthält, gibt man eine solche zurück. Andernfalls wählt man eine starke Zusammenhangskomponente K von G_0 mit $r \notin V(K)$ und $l(e) > 0$ für alle $e \in \delta_G^-(V(K))$. Überlegen Sie sich, warum eine solche existiert. Es sei $\alpha := \min\{l(e) \mid e \in \delta_G^-(V(K))\}$. Setze nun $l'(e) := l(e) - \alpha$ für $e \in \delta_G^-(V(K))$ und $l'(e) := l(e)$ für $e \in E(G) \setminus \delta_G^-(V(K))$. Dann berechnet man rekursiv eine kostenminimale aufspannende r -Arboreszenz T bezüglich l' . Zeigen Sie, dass T so gewählt werden kann, dass $|\delta_T^-(V(K))| = 1$ gilt. Eine solche Arboreszenz T gibt man dann zurück.

Beweisen Sie, dass dieser Algorithmus korrekt funktioniert.

(5 Punkte)

Sie finden den aktuellen Übungszettel stets auf der Übungs-Seite der Vorlesung:

http://www.or.uni-bonn.de/lectures/ws25/edm_uebung_ws25.html

Abgabe: Donnerstag, den 20.11.2025, 16:00 Uhr über die eCampus-Seite der eigenen Übungsgruppe.

https://ecampus.uni-bonn.de/goto_ecampus_crs_3864991.html

Ein Hinweis der Fachschaft Mathematik:

Equity in math—an event for men

The event will take place on 17 November from 16:00 to 18:00 in the Lipschitzsaal.

The Gleichstellungsreferat of the Fachschaft Mathematik warmly invites you to this event, where we will discuss male perspectives on gender equality.

The program will include a talk on the topic, a panel discussion with professors and students, and the opportunity to chat over drinks and enjoy free cookies afterwards. You can find more information on our website at fsmath.uni-bonn.de.

Of course, everyone is welcome to join we look forward to seeing you there :)